Über hochfrequente Wechselspannungsmessungen mit dem Hoffmannschen Duantenelektrometer

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktors

einer

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Wilhelm Otto

aus Jerichow (Elbe)

Halle (Saale) 1938

Druckerei und Verlag wissenschaftlicher Werke Konrad Triltsch, Würzburg-Aumühle

Berichterstatter:
Prof. Dr. G. Hoffmann.

Mitberichterstatter:
Prof. Dr. W. Kast.

Tag der mündlichen Prüfung: 15. 12. 1937.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen lieben Eltern!

I. Aufgabenstellung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, mit dem Duantenelektrometer hochfrequente Wechselspannungen verschiedener Frequenzen zu messen bei Kenntnis des Phasenwinkels zwischen den Spannungen an den Duanten und an der Nadel, da der Ausschlag des Elektrometers auch durch ihn bedingt ist. Der Fehler, der durch die Kapazität des Elektrometers entsteht, kann bei bekannter Kapazität ermittelt werden.

II. Allgemeines.

Zur Messung von hochfrequenten Wechselspannungen sind viele Methoden entwickelt worden. In geschichtlicher Hinsicht steht das Quadrantelektrometer an erster Stelle, das jedoch wegen der großen Kapazität nur bis zum Bereich der mittleren Frequenzen angewandt werden kann. Andere Elektrometer mit sehr kleiner Kapazität haben den Nachteil, daß ihre Empfindlichkeit zu klein ist. Es wurden dann die Röhrenvoltmeter und -elektrometer entwickelt, deren Bedienung aber oft nicht leicht ist und die einen verhältnismäßig großen Aufwand an Instrumenten notwendig machen, von denen die Meßgenauigkeit weitgehend abhängt. Auch eine Frequenzunabhängigkeit ist nicht immer gegeben, so daß jeweils eine Eichung in dem betreffenden Frequenzbereich erforderlich ist. Im wesentlichen beruhen die Methoden auf einer direkten Eichung, auf einem Vergleich der Wechselspannung mit einer Gleichspannung, oder auch die Wechselspannungsmessung wird auf eine Ladungsmessung zurückgeführt, also auf statischem Wege gemessen.

Die prinzipiell einfachste und auch in der Bedienung leichteste Methode ist die Verwendung des Elektrometers. Da jedoch ortsfeste Aufstellung verlangt wird, ist sie auf das Laboratorium beschränkt. Man unterscheidet zwischen Elektrometern ohne und solchen mit Hilfsspannung, wobei bei den letzteren die Empfindlichkeit durch das zusätzliche elektrische Feld wesentlich größer ist, doch wird durch die Platten die Kapazität nicht unwesentlich erhöht. Es besteht gegenüber den anderen Methoden der hochfrequenten Wechselspannungsmessung der grundlegende Unterschied,

daß die Phase zwischen Nadel- und Hilfsspannung berücksichtigt werden muß, was die praktische Verwendung beeinträchtigt, da sie nicht ohne weiteres bekannt ist und in jedem Falle gemessen werden muß, sie auch meist ganz außerhalb des Interesses liegt, während die oben angeführten Instrumente nur einmal geeicht zu werden brauchen und dann immer verwendet werden können.

Die Meßgenauigkeit hängt im wesentlichen von der Kapazität des Elektrometers ab, wodurch eine Grenze in der Anwendbarkeit gesetzt ist, da mit steigender Frequenz die Blindströme einen immer größer werdenden Meßfehler bedingen. Es ist daher zu erstreben, bei einer kleinen Kapazität eine möglichst große Empfindlichkeit zu bekommen. Diese zwei Bedingungen werden von dem von G. Hoffmann [1]) konstruierten Duantenelektrometer erfüllt.

Die Kapazität liegt in der Größenordnung von 5 cm. Die Empfindlichkeit wird durch eine Hilfsspannung geregelt, die an den Duanten liegt und durch die die Empfindlichkeit bis zur Labilisierung der Nadel getrieben werden kann. Bei Wechselspannungsmessungen muß eine Hilfsspannung gleicher Frequenz benutzt werden.

III. Beschreibung des Duantenelektrometers.

Zur Messung wurde das vereinfachte Duantenelektrometer benutzt, wie es zuerst K. Engel und W. S. Pforte [2]) beschrieben haben [3]).

Auf einem Dreifuß liegt drehbar eine Hartgummiplatte, auf der die beiden Duanten befestigt sind. Um eine möglichst kleine Kapazität zu erreichen, wurden die Duantenschachteln herausgenommen, so daß nur an den Grundplatten die Hilfsspannung liegt. Die Schutzwiderstände, die sich in den Zuleitungen befinden, wurden gleichfalls entfernt. Die Zuleitung zum System geht durch den Elektrometerkopf und liegt in Bernstein. Durch ein Gewinde kann die Höhe des Systems über die Duanten beliebig eingestellt werden.

Das System besteht aus einer Pt-Folie von 3 μ Dicke. Es hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel etwa 6 mm lang ist. System und Spiegel hängt an einem 6 μ Faden, der ebenfalls aus Platin besteht.

---

[1]) G. Hoffmann, Ann. d. Phys. (4) 42. 1196. 1913. ebenda (4) 52. 665. 1917.
[2]) K. Engel und W. S. Pforte, Phys. ZS. 32, 81. 1931.
[3]) Hersteller: Leybolds Nachf. Köln.

IV. Die Elektrometertheorie.

Niederfrequente Wechselspannungsmessungen mit dem Duantenelektrometer wurden zuerst von K. Engel und W. S. Pforte (l. c.) und W. Eggers [4]) durchgeführt. Sie erweiterten die Theorie auf niederfrequente Wechselspannungen. A. Herrmann [5]) konnte sie dann auf hochfrequente ausdehnen, die zu gleicher Zeit von G. Michel [6]) experimentell nachgeprüft wurde.

A. Herrmann ging von der von G. Hoffmann [1]) entwickelten Theorie aus. Der Ausschlag, wie er sich aus der Theorie für Gleichspannung ergibt, ist gegeben durch

$$\varphi = \frac{2\,Da\,Vv}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,V^2} \qquad (1)$$

In dieser Formel bedeuten: D der Skalenabstand, a, b, R_0 die Konstanten des Elektrometers, wie sie die Theorie gibt (Über ihre Bestimmung siehe G. Hoffmann, l. c.), V die Duantenspannung und v die Nadelspannung.

Bei Wechselspannungen ist der Ausschlag bedingt durch die Effektivspannungen. Da hier zeitlich schwankende Richtkräfte auftreten, müssen sie über die Zeit integriert werden. A. Herrmann hat die Theorie auf beliebige Phasenwinkel zwischen V und v erweitert. Es wird deshalb der Mittelwert zweier Spannungen angesetzt. Wenn $V = V_0 \cdot \sin \omega t$ und $v = v_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$ ist, so wird

$$\mathfrak{M}(V_v) = \frac{1}{T}\int_0^T Vv\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_0 v_0 \cdot \sin \omega t \,.\, \sin(\omega t + \delta)\,dt$$

und (1) geht über in

$$\varphi = \frac{2\,Da\,\mathfrak{M}(Vv)}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,\mathfrak{M}(V^2)}$$

Durch Berechnung des Mittelwertes folgt für den Ausschlag

$$\varphi = \frac{Da\,V_0 v_0 \cos\delta}{R_0 - \frac{1}{4}\,b\,V^2_0} \qquad (2)$$

und nach Einführung der Effektivspannungen

$$\varphi = \frac{2\,Da\,Vv \cdot \cos\delta}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,V^2}, \qquad (3)$$

wo δ der Phasenwinkel zwischen Duanten- und Nadelspannung ist.

4) W. Eggers, Ann. d. Phys. 7. 833. 1930.
5) A. Herrmann, Phys. ZS. 87. 718. 1934.
6) G. Michel, Phys. ZS. 87. 706. 1934.

Statt der langwierigen Berechnung des Mittelwertes kann ein einfacherer Weg durch Einführung von Vektoren gegangen werden. Für jeden beliebigen Phasenwinkel ist der Ausschlag bedingt durch das skalare Produkt $\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{v} = V \cdot v \cdot \cos \delta$. Da $\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{V} = V^2$, erhält man aus (1) den obigen Ausdruck für φ (3).

Wie aus den Formeln zu ersehen ist, hängt φ nicht nur von der Nadelspannung, sondern auch noch von δ ab, d. h. für $\delta = \frac{\pi}{2}$ wird auch $\varphi = 0$, ohne daß v Null zu sein braucht. Für jede Messung ist daher die Kenntnis des Phasenwinkels notwendig. Er muß bestimmt werden, wenn nicht durch die Schaltung selber ein bestimm-

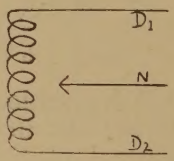

Abb. 1.

ter Winkel gegeben ist, wie z. B. aus Abb. 1 zu ersehen ist, wo Duanten- und Nadelspannung gleichphasig sind, vorausgesetzt, daß keine Phasenänderung auftritt.

Andererseits kann der Phasenwinkel bei Kenntnis von v gemessen werden, denn es wird:

$$\cos \delta = \frac{\varphi}{v} \cdot \frac{R_0 - \frac{1}{2} b V^2}{2 Da V}.$$

Zur Berechnung müssen die Konstanten bekannt sein. Es sei angenommen, daß sie für hochfrequente Wechselspannungen die gleichen sind wie für Gleichspannung; weiter unten wird nachgewiesen werden, daß dies der Fall ist. Es folgt daher aus Formel (3) für $\delta = 0$, wenn die Duantenspannung konstant gehalten wird,

$$\frac{R_0 - \frac{1}{2} b V^2}{2 Da V} = \frac{v_1}{\varphi_1} = S_1$$

und für jeden anderen Phasenwinkel

$$\frac{R_0 - \frac{1}{2} b V^2}{2 Da V} \cdot \frac{1}{\cos \delta} = \frac{v_2}{\varphi_2} = S_2,$$

wo $S_{1,2}$ der Spannungswert ist. Bei gleicher Duantenspannung ergibt sich dann die Beziehung

$$S_1 \cdot \frac{1}{\cos \delta} = S_2 \quad \text{oder} \quad S_1 = S_2 \cdot \cos \delta. \tag{4}$$

Es wird also für

$$\delta = 0, \quad S_2 = S_1$$

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad S_2 > S_1$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}, \quad S_2 = \infty$$

Die Empfindlichkeit ist $E = \frac{1}{S}$. Es ist dann

$$E_2 = E_1, \text{ wenn } \delta = 0$$

$$E_2 < E_1, \text{ wenn } 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

$$E_2 = 0, \text{ wenn } \delta = \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Formel (4) kann noch vereinfacht werden, wenn zwischen dem Ausschlag und der Nadelspannung eine lineare Abhängigkeit besteht, was hier der Fall ist. Dann folgt aus den Eichkurven für gleiche Nadelspannung

$$\cos \delta = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \tag{5}$$

wo φ_1 der Ausschlag bei $\delta = 0$ ist.

V. Die Meßanordnung.

Die Messungen wurden nach der aus Abb. 2 ersichtlichen Schaltung vorgenommen. Als Hochfrequenzgenerator wurde ein Sender

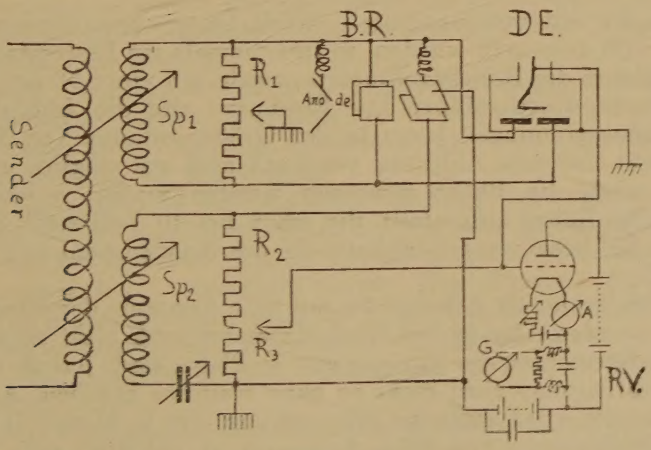

Abb. 2. Schaltskizze.

aufgebaut, der für diese Messungen eine hinreichend gute Konstanz hatte und der eine sinusförmige Wechselspannung gab. Die Wellenlänge war maximal 180 m, entsprechend einer Frequenz von $1{,}67 \cdot 10^6$ per/sec. Die Frequenz wurde durch Einsetzen verschiedener Spulen von 25—100 Windungen variiert. Die Eichung geschah jeweils mit einem Frequenzmesser.

Zur Messung der Nadelspannung wurde ein Röhrenvoltmeter aufgebaut. Damit die Isolationsverluste möglichst gering waren, und da eine möglichst kleine Gitteranodenkapazität angestrebt wurde, wurde ein Elektronenrohr verwandt, dessen Gitterdurchführung durch den Kopf der Röhre ging. Die Anodenspannung be-

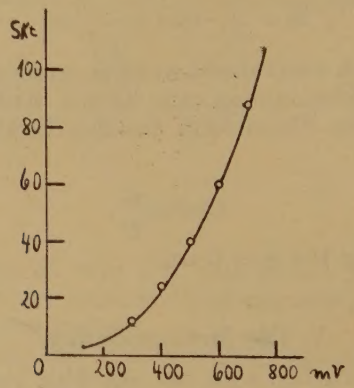

Abb. 3. Eichkurve des Röhrenvoltmeters.

trug 50, die Gittervorspannung — 3 Volt. Da nur Spannungen bis zu einem Volt gemessen wurden, so trat niemals ein Gitterstrom auf. Die Eichung des Röhrenvoltmeters wurde mit einer 50 per Wechselspannung durchgeführt. Die Eichkurve gibt die Abbildung 4. Die Nadelspannungen lagen in der Größenordnung von 500 mV; man sieht, daß eine Ablesung von 5 mV noch gut möglich war.

Da auch die Phase gemessen werden mußte, wurde eine Braunsche Röhre aufgestellt, die schon bei 10 Volt recht gut ansprach. Sie besaß eine Glühkathode, die Anodenspannung betrug 400 Volt.

In den früheren Arbeiten ist auf eine Kenntnis der Phase verzichtet worden. Das ist bei Niederfrequenz auch nicht notwendig, da im allgemeinen die Spannungen in Phase sind, jedoch ist dies bei Hochfrequenz nicht mehr so ohne weiteres gegeben. Aus diesem Grunde wird auch die Abweichung, die G. Michel (l. c.) bei einer Wellenlänge von 405 m bekommt, zu erklären sein, da für einen Phasenwinkel erst ein größerer Fehler in Erscheinung tre-

ten kann, wie weiter unten nachgewiesen wird. Eine Messung der Phase ist in der von ihm verwendeten Schaltung, Abb. 1, nicht möglich, so mußte ein anderer Weg beschritten werden. Auch sollte jede beliebige Phase eingestellt werden können.

In der vorliegenden Arbeit wurde nun so verfahren, daß Duanten- und Nadelspannung vollkommen getrennt werden. Es wurden daher zwei Kopplungsspulen benutzt, die eine, die die Duantenspannung, die andere, die die Nadelspannung lieferte. Spule 1 wurde über einen induktionsfreien Widerstand, etwa 8000 Ohm geschlossen, der in der Mitte geerdet wurde. Dies ist notwendig, um genau definierte Potentiale an den Duanten zu haben. Spule 2 bildete mit einer veränderlichen Kapazität und einem induktionsfreien Widerstande, etwa 10000 Ohm, einen Schwingungskreis. Das eine Ende vom R_2 lag mit der Mitte von R_1 an Erde. Dieser Widerstand wurde eingebaut, um eine Dämpfung des Kreises zu erreichen, damit ein Springen der Phase vermieden wird, dann aber auch um eine genügend hohe Spannung an den Enden von R_2 zu bekommen, die für den Betrieb der Braunschen Röhre notwendig ist. Da der Widerstand induktionsfrei ist, sind Strom und Spannung längs des Widerstandes in Phase, so daß die Nadelspannung, die durch einen dritten Abgriff gegeben ist, mit der Spannung an den Enden von R_2 gleichphasig ist.

Die Kopplung konnte beliebig geändert werden, so daß jede Amplitude eingestellt werden konnte. Von R_1 gehen die Zuleitungen über das eine Plattenpaar der Braunschen Röhre an die Duanten, die Enden von R_2 liegen an dem anderen Paare, und von einem Abgriff führt die Zuleitung über das Gitter des Röhrenvoltmeters zur Nadel. Da Anode und Ablenkplatten auf definiertem Potential liegen müssen, so waren, um Kurzschluß der hochfrequenten Wechselspannung zu vermeiden, Drosselspulen zwischen Anode und Plattenpaar erforderlich.

Einmal konnten verschiedene Nadelspannungen dadurch erreicht werden, daß die Spannung am Widerstande R_2 durch eine festere oder losere Kopplung verändert wurde, andererseits waren noch Abgriffe an R_2 angebracht.

Die Kapazität und die Induktion der Kopplungsspule wurde so gewählt, daß die Resonnanzlage in der Mitte des Drehkondensators war, wodurch bei einer Kapazitätsänderung eine Einstellung der Phase von 0 bis π ermöglicht wurde. Eine Phasenänderung hat stets eine Amplitudenänderung zur Folge. Die Kapazität des Drehkondensators hatte einen Höchstwert von 140 cm. Für die verschiedenen Wellenlängen wurden Spulen von 25 und 50 Windungen eingesetzt.

Da die Plattenpaare der Braunschen Röhre senkrecht zueinander stehen und da die Duantenspannung und die Spannung am Wi-

derstande R_2 stets die gleiche Frequenz hatten, — durch geeignete Wahl der Kopplungsspulen wurden im Schwingungskreis auch Vielfache der Senderfrequenz erhalten —, so entstehen auf dem Schirm der Braunschen Röhre Lissajousche Figuren und zwar, einfache Gerade, wenn $\delta = 0$ ist, sonst Ellipsen, die bei $\delta = \frac{\pi}{2}$ in den Achsen des Koordinatensystems liegen; bei Amplitudengleichheit Gerade und Ellipsen, deren Achsen eine Neigung von 45° gegen die Achsen des Koordinatensystems haben, und Kreise bei $\delta = \frac{\pi}{2}$. Die Phasenwinkel können leicht aus den Figuren ermittelt werden. Dazu wurde auf dem Schirm ein Achsenkreuz aus Millimeterpapier so angebracht, daß es genau in den Projektionen der Flächennormalen der Ablenkplatten auf dem Schirm liegt. Es besteht zwischen der Phase und den Achsen der Ellipse eine einfache Beziehung. Wenn a und b die große bzw. die kleine Halbachse ist, so wird $\sin \delta = b/a$. Durch den Schnittpunkt der Tangente, die die Ellipse im Scheitel berührt und senkrecht auf der einen Koordinatenachse steht, mit dieser Achse und durch den Nullpunkt ist a bestimmt. b ist gegeben durch den Schnitt der Ellipse mit der gleichen Koordinatenachse und durch den Nullpunkt.

Gleichzeitig war die Braunsche Röhre auf Spannungen geeicht worden, so daß auch die Duantenspannung an ihr abgelesen werden konnte.

Bei den Messungen wurde so verfahren, daß gleichzeitig die Ausschläge am Röhrenvoltmeter wie am Duantenelektrometer aufgezeichnet, so dann die Phase und die Duantenspannung an der Braunschen Röhre abgelesen wurden.

VI. Meßergebnisse.

Das Elektrometer wurde mit Gleichspannung nach Abb. 4 geeicht. Es wurde dazu nicht der Ausschlag in Abhängigkeit von der

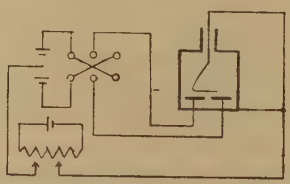

Abb. 4. Schaltskizze für Gleichspannung.

Nadelspannung, sondern der Spannungswert $S = \frac{v}{\varphi}$ in Abhängigkeit von der Duantenspannung aufgetragen. Dies hat den Vorteil,

daß eine genaue Einstellung der Duantenspannung nicht erforderlich ist. Die so aufgenommene Kurve zeigt Abb. 5, ausgezogen. Da hier die reziproke Empfindlichkeit aufgetragen worden ist, nimmt die Empfindlichkeit mit fallender Kurve zu, bis schließlich in dem Schnitt mit der Abszisse die Labilisierung der Nadel erreicht ist, hier etwa bei $V = 47{,}5$ Volt. Die Lage und der Verlauf der Kurve ist jeweils durch die Größe und durch die Form des Systems und durch seine Höhe über den Duanten bestimmt.

Die Messung der hochfrequenten Wechselspannungen wurden bei folgenden Frequenzen durchgeführt: $1{,}67 \cdot 10^6$ (180 m), $2{,}5 \cdot 10^6$

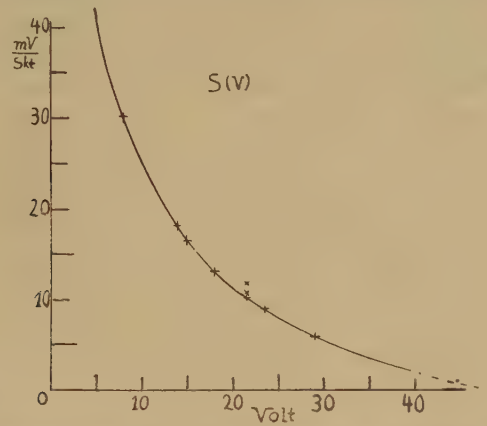

Abb. 5. Der Spannungswert in Abhängigkeit von der Duantenspannung.

(120 m), $3{,}5 \cdot 10^6$ (80 m), $5 \cdot 10^6$ (60 m) und $6 \cdot 10^6$ per/sec (50 m). Nach der theoretischen Betrachtung des vorigen Abschnittes muß unter Berücksichtigung des Phasenwinkels ein gleicher Verlauf der S(V)-Kurve zu erwarten sein. Die Spannungswerte aus den Wechselspannungsmessungen müssen mit den Gleichspannungswerten genau übereinstimmen. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit liegt also darin, festzustellen, ob dies der Fall ist und wenn nicht, wie diese Abweichung behoben werden kann.

Die Messungen wurden nach der oben beschriebenen Weise durchgeführt. Aus den erhaltenen Werten ergab sich nun folgendes: Die gefundenen Meßpunkte sind, wenn Gleichphasigkeit zwischen Duanten- und Nadelspannung bestand, bei allen benutzten Frequenzen in voller Übereinstimmung mit der Theorie (in Abb. 6 mit + bezeichnet), daß aber bei jedem Phasenwinkel eine um so größere Abweichung auftritt, je größer er wird. In Abb. 5 sind für $V = 21{,}5$ Volt und für eine Frequenz von $2{,}5 \cdot 10^6$ per/sec die Werte für verschiedene Phasenwinkel eingetragen, mit $\times$ bezeichnet. Da

dieser Fehler auch noch von der Frequenz abhängig ist, entstehen Kurvenscharen, die den Phasenwinkel und die Frequenz als Parameter haben. Es muß also die Kapazität des Elektrometers diesen Fehler hervorrufen, der durch die Überlegungen des folgenden Abschnittes tatsächlich behoben werden konnte. Nachdem die Korrektion angebracht worden war, standen die gefundenen Werte in voller Übereinstimmung mit den Gleichspannungswerten. Abb. 6 gibt ein weiteres Beispiel.

Da der Ausschlag vom Phasenwinkel abhängt, war es von Interesse, die Änderung des Ausschlages mit dem Phasenwinkel zu untersuchen. Es wurden dazu Meßreihen bei verschiedenen Phasenwinkeln aufgestellt. Die Abb. 6 zeigt eine solche. Bei konstanter Duanten- und konstanter Nadelspannung wurde der Ausschlag des Elektrometers in Abhängigkeit vom Phasenwinkel aufgetragen, es sind dies die üblichen Eichkurven.

Man sieht, daß bei $\delta = 0$ die größte Empfindlichkeit erreicht ist, daß aber bei jedem Phasenwinkel zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ die Kurven innerhalb des von der Abszisse und von der Geraden $\delta = 0$ begrenzten Flächenstückes verlaufen, bei $\delta = \frac{\pi}{2}$ sollten sie in der Abszisse liegen, d. h. der Ausschlag ist bei jeder Nadelspannung

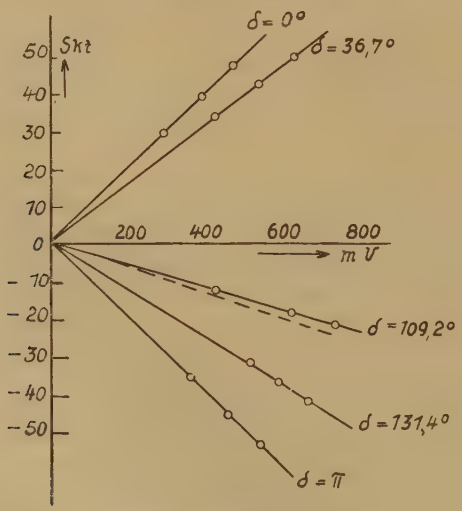

Abb. 6. Eichkurven.

Null. Die Empfindlichkeit wird dann wieder größer, doch ist hier der Ausschlag entgegengesetzt, bis sie bei $\delta = \pi$ ihren Maximalwert erreicht.

Es besteht nach den Überlegungen des vorigen Abschnittes die folgende Beziehung zwischen Ausschlag und Phasenwinkel, $\cos \delta = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ (5). Diese Beziehung gilt bei den hier verwendeten Frequenzen nicht mehr, denn es tritt nach den oben gemachten Beobachtungen ein Fehler auf. Dieser Fehler hat auch zur Folge, daß der Ausschlag für $\delta = \frac{\pi}{2}$ nicht Null ist. Es wurde ein Phasenwinkel von genau $\frac{\pi}{2}$ eingestellt: Ein Ausschlag des Elektrometers wurde beobachtet. Als Beispiel wurde zu der gemessenen Kurve $\delta = 109^0{,}2$ die nach dem maximalen Ausschlage berechnete Kurve $v_0 \cdot \cos 109^0{,}2$ gezeichnet (gestrichelt). Der Ausschlag ist verkleinert gegen den berechneten, d. h., der Phasenwinkel ist kleiner gegen den wirklichen (Phase zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π). Es ruft die Kapazität des Elektrometers eine Phasenverschiebung hervor. Der Ausschlag, nicht absolut genommen, ist in dem Bereich $0 < \delta < \pi$ vergrößert, und er wird nicht bei $\delta = 0$, sondern bei einem Winkel maximal sein, der durch die Phasenverschiebung gegeben ist, hier jedoch nicht meßbar, da der Fehler innerhalb der Meßgenauigkeit liegt.

Es sei hier erwähnt, daß aus den Formeln für den Fehler die Kapazität des Elektrometers bestimmt werden kann. Die gemessenen Geraden und die zu erwartenden geben eine Differenz, die entsprechend in den Formeln einzusetzen ist. Man hat dann nur nach der Kapazität aufzulösen.

VII. Der Meßfehler.

Aus dem vorigen Abschnitt folgt, daß die Kapazität des Elektrometers bei diesen Frequenzen nur dann zu vernachlässigen ist, wenn Duanten- und Nadelspannung in gleicher Phase sind. Bei höheren Frequenzen wird auch der Fehler bei Phasengleichheit zu berücksichtigen sein. Für das Quadrantelektrometer führte E. Orlich [7]) die Berechnung des Fehlers durch; ähnliche Überlegungen gelten hier.

Durch das zwischen der Nadel und den Duanten bestehende elektrische Feld wird auf die Nadel eine Ladung influenziert. Der Kapazitätsstrom ruft in dem Widerstande R des Elektrometerfadens und in einem äußeren Widerstande R_a einen Spannungsabfall hervor, der den Ausschlag des Elektrometers beeinflußt. Er ist gegeben durch:

$$v_1 = i \cdot (R + R_a) = i \cdot R'.$$

Aus der Bauart des Elektrometers ergibt sich noch folgendes: Die

[7]) E. Orlich, ZS. f. Instrk. 29. 40. 1909.

Durchführung durch den Elektrometerkopf ist praktisch widerstandslos, und da die wesentliche Kapazität vom Gehäuse gegen die Nadel in ihm liegt, so ruft dieser Kapazitätsstrom einen Spannungsabfall nur in dem äußeren Widerstande R_a hervor. Es ist daher

$$v_2 = i_g \cdot R_a,$$

so daß der gesamte Spannungsabfall sich errechnet zu

$$v_1 + v_2 = i \cdot R' + i_g \cdot R_a.$$

Ist die zu messende Spannung v und die Nadelspannung v_n, so ist

$$v_n = v - (i \cdot R' + i_g \cdot R_a).$$

Zur Berechnung der den Ausschlag bedingenden Spannung v_n ist noch gegeben:

$$i = \frac{de_n}{dt} \text{ und } i_g = \frac{de_g}{dt}.$$

Die Berechnung des Stromes geschieht in folgender Weise: Die Ladung eines Leiters in einem Leitersystem ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$e_n = C_{n1}(U_n - U_1) + C_{n2}(U_n - U_2) + \ldots\ldots$$

Diese ganz allgemeingültige Gleichung wird auf das Duantenelektrometer übertragen. Es bedeuten: U_1, U_2 die Potentiale der Duanten, U_3 die Nadelspannung, C_1, C_2 die Kapazitäten der Nadel gegen die Duanten und C_g diejenige der Nadel gegen das Gehäuse.

Die folgende Einschränkung sei noch gemacht, die hier noch genügend Genauigkeit gibt: Die Kapazitäten der beiden Duanten gegen die Nadel sollen als gleich groß angesehen werden; bei kleinem Ausschlag ist dies hinreichend erfüllt. Dann ist $C_1 = C_2 = C$. Damit ergibt sich für die Ladung der Nadel die Gleichung:

$$\begin{aligned} e_n &= C \cdot (U_n - U_1) + C \cdot (U_n - U_2) \\ &= 2 \cdot C \cdot U_n - C \cdot (U_1 + U_2) = 2 \cdot C \cdot U_n, \end{aligned}$$

denn es kann immer erreicht werden, daß die Potentiale der Duanten absolut gleich sind; es ist dies der Fall, wenn elektrischer und mechanischer Nullpunkt übereinstimmen. So wird, da ihre Potentiale entgegengesetzt gerichtet sind, $U_1 + U_2 = 0$. Für die Zuleitung ergibt sich eine zusätzliche Ladung:

$$e_g = C_g \cdot U'_n.$$

In komplexer Schreibweise ist die Ladung gegeben durch

$$e = e_0 \cdot e^{j\omega t},$$

es ergibt sich dann für den Strom:

$$i = \frac{de_n}{dt} j\omega e_n \quad \text{bzw.} \quad i_g = j\omega e_g.$$

Der Verlauf der Rechnung ist der, daß in Formel (1) das Produkt $V \cdot v$ wieder durch den Mittelwert $\mathfrak{M}(V \cdot v_n)$ zu ersetzen ist. Der Fehler ergibt sich dann aus der Abweichung von Formel (3). Hier sei der einfachere Weg der komplexen Rechnung gegangen. Deshalb werde noch die zu messende Spannung mit $\mathfrak{v}$ und die Nadelspannung mit $\mathfrak{v}_n$ usw. bezeichnet.

Unter Einsetzung der oben gewonnenen Beziehungen erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}_n &= \mathfrak{v} - j\omega R' \mathfrak{e}_n - j\omega R_a \mathfrak{e}_g \\
&= \mathfrak{v} - 2j\omega R'C\,\mathfrak{v}_n - j\omega R_a C_g\,\mathfrak{v}'_n \\
&= \frac{\mathfrak{v} - j\omega R_a C_g\,\mathfrak{v}_n}{1 + 2j\omega RC} \\
&= \frac{\mathfrak{v} - 2j\omega R'C\,\mathfrak{v} - j\omega R_a C_g\,\mathfrak{v}'_n - 2\omega^2 R' R_a C C_g\,\mathfrak{v}'_n}{1 + 4\omega^2 R'^2 C^2}.
\end{aligned}$$

Nach den Rechenregeln der komplexen Zahlen ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot j = -A \cdot B \cdot \sin\delta.$$

Damit ergibt sich das für den Ausschlag wichtige skalare Produkt zu:

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{v}_n = \frac{Vv \cdot \cos\delta + 2\omega R'C\,Vv \sin\delta + \omega R_a C_g\,Vv' \sin\delta - 2\omega^2 R' R_a C C_g\,Vv'_n \cos\delta}{1 + 4\omega^2 R'^2 C^2}$$

Da in der Abb. 2 der Spannungsabfall im Widerstande R_a für die Messung hier keine Bedeutung hat, denn die Nadelspannung wurde mit dem Röhrenvoltmeter an R_a gemessen, so wird $\mathfrak{v}'_n = 0$. Es vereinfacht sich daher der obige Ausdruck:

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{v}_n = \frac{Vv \cos\delta + 2\omega RC\,Vv \sin\delta}{1 + 4\omega^2 R^2 C^2}$$

Da $4\omega^2 R^2 C^2 \ll 1$, kann der Ausdruck in den Zähler gebracht werden, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{v}_n &= Vv \cos\delta\,[1 + 2\omega RC\,\mathrm{tg}\,\delta - 4\omega^2 R^2 C^2] \\
&= Vv \cos\delta\,[1 + \Delta_1] \\
\text{oder} \qquad &= Vv\,[\cos\delta + 2\omega\,RC \sin\delta - 4\omega^2 R^2 C^2] \\
&= Vv\,[\cos\delta + \Delta_2].
\end{aligned}$$

Hierin bedeutet:

$$\Delta_1 = +2\omega RC\,\mathrm{tg}\,\delta - 4\omega^2 R^2 C^2$$

den auf die Gerade $g = v \cdot \cos\delta$ bezogenen Fehler und

$$\Delta_2 = +2\omega RC \sin\delta - 4\omega^2 R^2 C^2$$

den auf den maximalen, $\delta = 0$ entsprechenden Ausschlag bezogenen Fehler. Man erhält somit die neuen Ausdrücke für den Ausschlag des Elektrometers:

$$\varphi = \frac{2\,Da\,Vv\cos\delta\,[1+\Delta_1]}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,V^2}\,, \tag{6a}$$

$$\varphi = \frac{2\,Da\,Vv\,[\cos\delta+\Delta_2]}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,V^2}\,. \tag{6b}$$

Tatsächlich besteht Übereinstimmung mit Formel (3), wenn $\Delta = 0$, also $R = 0$ ist.

Aus den Fehlerformeln ist zu ersehen, daß der Fehler außer von der Frequenz auch noch vom Phasenwinkel abhängt, was auch beobachtet worden war.

Die Formeln für den Fehler nehmen für $\delta = 0$ und für $\delta = \frac{\pi}{2}$ eine vereinfachte Form an. Es ergibt sich angenähert:

1. für $\delta = 0 \quad \Delta_0 = -4\,\omega^2\,R^2\,C^2$

2. für $\delta = \frac{\pi}{2}\ \Delta_{\frac{\pi}{2}} = +2\,\omega\,RC$.

Diese Formeln geben eine Möglichkeit, die Frequenz zu bestimmen, bei der eine Korrektion sich noch nicht als notwendig erweist. Da der Fehler vom Phasenwinkel abhängt, besteht ein gewisser Frequenzbereich, dessen Grenzen durch $\delta = 0$ und durch $\delta = \frac{\pi}{2}$ gegeben sind. Die Elektrometerausschläge liegen in der Größenordnung von 100 Skalenteilen bei 1 m Abstand. Bei welcher Frequenz kann noch eine Spannung auf ½ Skalenteil genau gemessen werden? Dann ist $\Delta < 1/200$, entsprechend 0,5% Fehler. Es ist gegeben $R = 200$ Ohm, $C = 6{,}2$ cm $= 6{,}9 \cdot 10^{-12}$ F. Durch Auflösen nach der Frequenz ergibt sich

1. für $\delta = 0$ $\quad 4{,}1 \cdot 10^6$ per/sec

2. für $\delta = \frac{\pi}{2}$ $\quad 2{,}9 \cdot 10^5$ per/sec.

Experimentell wurde festgestellt, daß der Fehler bei 60 m noch innerhalb der Meßgenauigkeit lag, daß aber bei 50 m bereits ein solcher beobachtet werden konnte. Das bedeutet, daß die Fehlerberechnung eine hinreichende Korrektur gibt, und somit die Verwendung des Elektrometers auch bei höheren Frequenzen noch gestattet.

VIII. Zusammenfassung.

Es wird eine Schaltung ausgearbeitet, in der Nadel- und Duantenspannung getrennt sind und die eine Messung der Phase mit der Braunschen Röhre gestattet.

Die Messungen ergeben folgendes: Sind Duanten- und Nadelspannung gleichphasig, so besteht bis zur Frequenz von $4{,}1 \cdot 10^6$ per/sec volle Übereinstimmung mit der Theorie. Daher lassen sich praktisch Wechselspannungen noch bis zu 1 mV ohne Schwierigkeit messen. Es wird gefunden, daß der auftretende Meßfehler um so größer wird, je größer der Phasenwinkel ist.

Der kapazitive Meßfehler wird berechnet. Aus der Abweichung der Eichkurven von dem $\cos\delta$-Verlauf kann aus den Formeln für den Fehler die Elektrometerkapazität bestimmt werden.

Aus der Fehlerberechnung wird ein neuer Ausdruck für den Ausschlag des Elektrometers gefunden, so daß jetzt die folgenden Formeln für Gleich- und Wechselspannung von fundamentaler Bedeutung für das Duantenelektrometer sind:

$$\varphi = \frac{2\,Da\,Vv}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,V^2}$$

$$\varphi = \frac{2\,Da\,Vv \cdot \cos\delta}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,V^2}$$

$$\varphi = \frac{2\,Da\,Vv\cos\delta\,[1 + \Delta_1]}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,V^2} = \frac{2\,Da\,Vv\,[\cos\delta + \Delta_2]}{R_0 - \frac{1}{2}\,b\,V^2}$$

Ist daher die Kapazität des Elektrometers bestimmt, so kann durch die Korrektion Δ das Elektrometer weitgehend für höhere Frequenzen Verwendung finden.

Herrn Prof. Dr. G. Hoffmann danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit. Zu Dank bin ich Herrn Prof. Dr. W. Kast verpflichtet für die Unterstützung, die er mir bei der Durchführung der Arbeit zuteil werden ließ.

Lebenslauf.

Am 20. 2. 1912 bin ich, Wilhelm Otto, als Sohn des Kaufmannes Wilhelm Otto und seiner Ehefrau Ida, geb. Hemstedt zu Jerichow (Elbe) geboren. Ich besuchte die Oberschule in Aufbauform in Genthin und legte dort 1932 meine Reifeprüfung ab. Ich studierte an den Universitäten in Jena, München und Halle, Physik, Mathematik und Chemie. Im W. S. 1935/36 begann ich mit den Vorarbeiten zur vorliegenden Dissertation im Institut für Experimentalphysik der Universität Halle-Wittenberg.